

# 玉米群体全生育期干物质积累特性的数学分析

张大光 阎晓艳 边秀芝

(四平市农业科学院, 公主岭 136100)

**摘要** 分析了玉米群体全生育期干物质积累的“S”型曲线、增长速度曲线及曲线上的拐点与对应的干物质积累最大速度, “S”曲线上的两个突变点及两点间直线增长期所处时期、干物质积累量以及在生产中的意义, 不同品种、施肥及产量水平的影响。

**关键词** 玉米; 干物质; 积累; 数学分析

玉米一生中各生育阶段干物质的积累, 是形成玉米产量的基础。因此, 了解玉米干物质的积累特性, 采取针对性技术措施, 促进干物质积累, 对提高玉米产量十分重要。

## 1 玉米一生中干物质积累的“S”型曲线

$$\text{曲线方程: } \hat{y} = \frac{c}{1 + e^{-(a+bx)}} \quad (1)$$

其中  $\hat{y}$  为干物质积累量 ( $\text{kg}/\text{hm}^2$ ),  $x$  为出苗天数,  $a, b, c$  为系数。不同品种、不同施肥、不同产量水平的曲线方程系数不同(表 1)。

表 1 不同品种、施肥及产量水平的曲线方程

品种	曲线方程	肥料	曲线方程	产量	曲线方程
四单 12	$\hat{y} = \frac{15\ 699.8}{1 + e^{(6.979\ 6 - 0.079\ 4x)}}$	无肥	$\hat{y} = \frac{13\ 296.2}{1 + e^{(8.365\ 1 - 0.105x)}}$	7 500	$\hat{y} = \frac{14\ 959.7}{1 + e^{(6.386\ 3 - 0.086\ 3x)}}$
黄 莫	$\hat{y} = \frac{25\ 623}{1 + e^{(6.638\ 3 - 0.082\ 2x)}}$	N150	$\hat{y} = \frac{18\ 268.5}{1 + e^{(8.388\ 5 - 0.102x)}}$	9 000	$\hat{y} = \frac{19\ 055.1}{1 + e^{(7.06 - 0.086\ 4x)}}$
四单 8	$\hat{y} = \frac{19\ 055.1}{1 + e^{(7.06 - 0.086\ 4x)}}$	P75	$\hat{y} = \frac{13\ 566.8}{1 + e^{(7.479\ 73 - 0.094\ 1x)}}$	10 500	$\hat{y} = \frac{20\ 174.9}{1 + e^{(7.026\ 8 - 0.073\ 1x)}}$
丹玉 13	$\hat{y} = \frac{19\ 705.5}{1 + e^{(5.527 - 0.065\ 7x)}}$	N150 P75	$\hat{y} = \frac{19\ 055.1}{1 + e^{(7.06 - 0.086\ 4x)}}$		
掖单 15	$\hat{y} = \frac{24\ 662.3}{1 + e^{(5.583 - 0.066\ 7x)}}$				

注: N150 示 150  $\text{kg}/\text{hm}^2$  N 素, P75 示 75  $\text{kg}/\text{hm}^2$   $\text{P}_2\text{O}_5$ , 产量单位均为  $\text{kg}/\text{hm}^2$ , 以下同。

## 2 由“S”型曲线获得增长速度方程

对上述“S”曲线方程进行一阶微分, 得出干物质增长速度(V)方程, 由此方程可以求得玉米群体一生中各生育阶段干物质的增长速度, 即每天每公顷干物质增产量(kg)。

$$V = \frac{dy}{dx} = \frac{c \cdot (-b) \cdot e^{-(a+bx)}}{(1 + e^{-(a+bx)})^2} \quad (2)$$

### 2.1 不同品种干物质增长速度方程

把各品种“S”型曲线方程中 a、b、c 系数值代入(2)式中,得如下干物质增长速度方程:

$$\text{四单 12} \quad V = \frac{15\,699.8 \times 0.079\,4 \times e^{6.979\,6 + 0.079\,4x}}{(1 + e^{6.979\,6 - 0.079\,4x})^2}$$

$$\text{黄莫} \quad V = \frac{25\,623 \times 0.082\,2 \times e^{6.638\,3 - 0.082\,2x}}{(1 + e^{6.638\,3 - 0.082\,2x})^2}$$

$$\text{四单 8} \quad V = \frac{19\,055.1 \times 0.086\,4 \times e^{7.06 - 0.086\,4x}}{(1 + e^{7.06 - 0.086\,4x})^2}$$

$$\text{丹玉 13} \quad V = \frac{19\,705.5 \times 0.065\,7 \times e^{5.527 - 0.065\,7x}}{(1 + e^{5.527 - 0.065\,7x})^2}$$

$$\text{掖单 15} \quad V = \frac{24\,662.3 \times 0.066\,7 \times e^{5.583 - 0.066\,7x}}{(1 + e^{5.583 - 0.066\,7x})^2}$$

## 2.2 不同施肥条件下的干物质增长速度方程

$$\text{无肥} \quad V = \frac{13\,296.2 \times 0.105 \times e^{8.365\,1 - 0.105x}}{(1 + e^{8.365\,1 - 0.105x})^2}$$

$$\text{N}_{150} \quad V = \frac{18\,268.5 \times 0.102\,1 \times e^{8.388\,5 - 0.102\,1x}}{(1 + e^{8.388\,5 - 0.102\,1x})^2}$$

$$\text{P}_{75} \quad V = \frac{13\,566.8 \times 0.094\,1 \times e^{7.497\,3 - 0.094\,1x}}{(1 + e^{7.497\,3 - 0.094\,1x})^2}$$

$$\text{N}_{150}\text{P}_{75} \quad V = \frac{19\,055.1 \times 0.086\,4 \times e^{7.06 - 0.086\,4x}}{(1 + e^{7.06 - 0.086\,4x})^2}$$

## 2.3 不同产量水平下的干物质增长速度方程

$$7\,500 \quad V = \frac{14\,959.7 \times 0.086\,3 \times e^{6.386\,3 - 0.086\,3x}}{(1 + e^{6.386\,3 - 0.086\,3x})^2}$$

$$9\,000 \quad V = \frac{20\,174.9 \times 0.086\,4 \times e^{7.06 - 0.086\,4x}}{(1 + e^{7.06 - 0.086\,4x})^2}$$

$$10\,500 \quad V = \frac{19\,055.1 \times 0.073\,1 \times e^{7.026\,8 - 0.073\,1x}}{(1 + e^{7.026\,8 - 0.073\,1x})^2}$$

## 3 干物质增长最大速度出现的时间

上述干物质增长速度方程是一连续变化的单峰曲线,曲线高峰即干物质增长速度的极大值。在这个极点值之前,随出苗天数的推移,干物质增长速度也随着增大;而在这点之后,随出苗天数的推移,增长速度不断减小。为此,干物质极大值出现的时期,是干物质增长曲线的关键点,即增长曲线的拐点。

此点出现时间的求得,对(1)式求二阶导数或对(2)式求一阶导数,得出增长加速度方程:

$$y'' = \frac{c \cdot b^2 \cdot e^{a+bx} \cdot (e^{a+bx} - 1)}{(1 + e^{a+bx})^3}$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 必使 } e^{a+bx} - 1 = 0, \text{ 即 } e^{a+bx} = 1, a + bx = 0, x = -\frac{a}{b} \quad (3)$$

### 3.1 不同品种干物质增长最大速度出现的时间(d)

$$\text{四单 12} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{6.979\,6}{-0.079\,4} = 88$$

$$\text{黄莫} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{6.638\,3}{-0.082\,2} = 81$$

$$\text{四单 8} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{7.06}{-0.086\,4} = 82$$

$$\text{丹玉 13} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{5.527}{-0.0657} = 84$$

$$\text{掖单 15} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{5.583}{-0.0667} = 84$$

上述品种干物质增长最大速度出现在出苗后的 81~88 d, 在子粒形成期。

### 3.2 不同施肥条件下干物质增长最大速度出现的时间(d)

$$\text{无肥} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{8.3651}{-0.105} = 80$$

$$\text{N}_{150} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{8.3885}{-0.1021} = 82$$

$$\text{P}_{75} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{7.4973}{-0.0941} = 80$$

$$\text{N}_{150}\text{P}_{75} \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{-7.06}{-0.0864} = 82$$

无肥和无氮区干物质增长最大速度出现在出苗后的 80 d, 较施氮区(82 d) 提前 2 d。大致都在子粒形成期。

### 3.3 不同产量水平干物质增长最大速度出现的时间(d)

$$7500 \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{6.3863}{-0.0863} = 74$$

$$9000 \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{7.06}{-0.0864} = 82$$

$$10500 \quad x = -\frac{a}{b} = -\frac{7.0268}{-0.0731} = 96$$

产量较高的干物质增长最大速度出现的时间较晚。

## 4 干物质增长的最大速度

将(3)式代入(2)式, 则得出最大增长速度为:

$$V_{\max} = \frac{-bc}{4} \quad (4)$$

经多年多品种试验, 在当前产量水平下, 干物质增长的最大速度为 305.5~526.6 kg/(hm<sup>2</sup>·d), 平均为 390 kg/(hm<sup>2</sup>·d)。

### 4.1 不同品种干物质增长的最大速度(kg/hm<sup>2</sup>·d)

$$\text{四单 12} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0794) \times 15699.8 = 311.64$$

$$\text{黄莫} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0822) \times 25623 = 526.55$$

$$\text{四单 8} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0864) \times 19055.1 = 441.59$$

$$\text{掖单 15} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0667) \times 24662.3 = 411.24$$

$$\text{丹玉 13} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0657) \times 19705.5 = 323.66$$

### 4.2 不同施肥条件下干物质增长的最大速度(kg/hm<sup>2</sup>·d)

$$\text{无肥} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.105) \times 13296.2 = 349.03$$

$$\text{N}_{150} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.1021) \times 18268.5 = 466.3$$

$$P_{75} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0941) \times 13566.8 = 319.16$$

$$N_{150}P_{75} \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0864) \times 19055.1 = 411.59$$

无肥和无氮区速度较低。

#### 4.3 不同产量水平干物质增长的最大速度(kg/hm<sup>2</sup>·d)

$$7500 \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0863) \times 14959.7 = 305.5$$

$$9000 \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0864) \times 19055.1 = 441.59$$

$$10500 \quad V_{\max} = \frac{-bc}{4} = -\frac{1}{4} \times (-0.0731) \times 20174.9 = 368.70$$

### 5 干物质积累“S”型曲线上的两个突变点

对“S”型曲线方程(1)求三阶导数,并令其等于零,得一元二次方程,解方程,由此求得生长规律的两个特征点:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - a}{b} \\ x_2 = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - a}{b} \end{cases} \quad (5)$$

$x_1$  和  $x_2$  分别代表生长曲线上的两个突变点。在  $x_1$  之前和  $x_2$  之后干物质积累缓慢,在  $x_1$  和  $x_2$  之间,干物质积累迅速, $y$  与  $x$  之间基本呈直线关系,为群体的旺盛生长期。

经 12 份资料统计, $x_1 = 67$  d,  $x_2 = 99$  d,即在出苗 67 d 前和 99 d 后干物质积累缓慢,在出苗后 67~99 d 之间为干物质直线积累期,此期间持续 32 d,大致在抽雄至乳熟期间。

#### 5.1 不同品种干物质积累“S”型曲线上的两个突变点(d)

$$\begin{cases} \text{四单 12} \begin{cases} x_1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - 6.9796}{-0.0794} = 71 \\ x_2 = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - 6.9796}{-0.0794} = 104 \end{cases} \\ \text{黄莫} \begin{cases} x_1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - 6.6383}{-0.0822} = 65 \\ x_2 = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - 6.6383}{-0.0822} = 97 \end{cases} \\ \text{四单 8} \begin{cases} x_1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - 7.06}{-0.0864} = 66 \\ x_2 = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - 7.06}{-0.0864} = 97 \end{cases} \\ \text{掖单 15} \begin{cases} x_1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) - 5.583}{-0.0667} = 64 \\ x_2 = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - a}{b} = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) - 5.583}{-0.0667} = 103 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{丹玉 13} \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 5.527}{-0.0657} = 64 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 5.527}{-0.0657} = 104 \end{cases}$$

这 5 个品种的干物质直线增长期持续的时间分别为 33、32、31、39 和 40 d。

### 5.2 不同施肥条件下干物质积累“S”型曲线上的两个突变点(d)

$$\begin{cases} \text{无肥} \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 8.3651}{-0.105} = 67 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 8.3651}{-0.105} = 92 \end{cases} \\ \text{N}_{150} \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 8.3885}{-0.1021} = 69 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 8.3885}{-0.1021} = 95 \end{cases} \\ \text{P}_{75} \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 7.4973}{-0.0941} = 66 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 7.4973}{-0.0941} = 94 \end{cases} \\ \text{N}_{150}\text{P}_{75} \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 7.06}{-0.0864} = 66 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 7.06}{-0.0864} = 97 \end{cases} \end{cases}$$

施肥可延长干物质直线增长期,和无肥区相比,单施氮延长 1 d,单施磷延长 3 d,氮、磷配施延长 6 d。直线增长期的延长,主要表现在  $x_2$  突变点延后。

### 5.3 不同产量水平条件下干物质积累“S”型曲线上的两个突变点(d)

$$\begin{cases} 7500 \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 6.3863}{-0.0863} = 59 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 6.3863}{-0.0863} = 89 \end{cases} \\ 9000 \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 7.06}{-0.0864} = 66 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 7.06}{-0.0864} = 97 \end{cases} \\ 10500 \begin{cases} x_1 = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 + \frac{\bar{3}}{b}) - 7.0268}{-0.0731} = 78 \\ x_2 = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(2 - \frac{\bar{3}}{b}) - 7.0268}{-0.0731} = 114 \end{cases} \end{cases}$$

从以上看出,产量高干物质直线增长期也延长。

## 6 直线增长期间干物质的积累量

用 GT 来表示直线增长期干物质的积累量,定义如下:

$$GT = -\frac{bc}{4}(x_2 - x_1) = V_{\max}(x_1 - x_2) \quad (6)$$

$V = \frac{-bc}{4}$  为速度特征值,即干物质积累速度的最大值; $\Delta x = x_2 - x_1$  为时间特征值,表示旺盛生长期持续时间的长短。 $GT$  表示  $x_2 - x_1$  的时段干物质积累量,这个时间是关键的时段。

经 12 份试验资料统计,直线增长期间干物质积累量平均为  $12\ 357\ \text{kg}/\text{hm}^2$ ,占全生育期干物质积累总量的 66.5%,而经历的天数为 32 d,仅占全生长期总天数的 25%。这表明干物质直线增长期是形成产量的关键时期。

### 6.1 不同品种直线增长期间干物质的积累量( $\text{kg}/\text{hm}^2$ )

$$\text{四单 12} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 311.64 \times (104 - 7) = 10\ 284$$

$$\text{黄莫} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 526.55 \times (97 - 65) = 16\ 850$$

$$\text{四单 8} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 441.59 \times (97 - 66) = 13\ 689$$

$$\text{掖单 15} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 411.24 \times (103 - 64) = 16\ 038$$

$$\text{丹玉 13} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 323.66 \times (104 - 64) = 12\ 946$$

高产品种直线增长期间干物质的积累量相应较高。

### 6.2 不同施肥条件下直线增长期间干物质的积累量( $\text{kg}/\text{hm}^2$ )

$$\text{无肥} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 349.03 \times (92 - 67) = 8\ 726$$

$$\text{N}_{150} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 466.3 \times (95 - 69) = 12\ 124$$

$$\text{p}_{75} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 319.16 \times (94 - 66) = 8\ 936$$

$$\text{N}_{150}\text{P}_{75} \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 411.59 \times (97 - 66) = 12\ 759$$

无肥和单施磷肥区干物质积累显著小于氮、磷配施区和单施氮肥区。此时各处理干物质积累差异与全生育期最后差异基本一致。它们占全生育期干物质积累总量的百分比分别为 65.6%、66.3%、65.8% 和 67%。

### 6.3 不同产量水平下直线增长期间干物质的积累量( $\text{kg}/\text{hm}^2$ )

$$7\ 500 \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 305.5 \times (89 - 59) = 9\ 165$$

$$9\ 000 \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 441.59 \times (97 - 66) = 13\ 689$$

$$10\ 500 \quad GT = V_{\max}(x_2 - x_1) = 368.7 \times (114 - 78) = 13\ 273$$

## 参 考 文 献

- 1 丁希泉,等.农业实用回归分析.长春:吉林科学技术出版社,1989,324~332
- 2 张颖.北方春玉米不同生育期干物质积累与氮、磷、钾含量的变化.玉米科学,1996,4(1):63~65
- 3 胡昌浩,等.夏玉米同化产物的积累与养分吸收分配规律的研究.中国农业科学,1982,15(1):56~64