DOI:10.16423/j.cnki.1003-8701.1983.02.016

苹果杂种后代抗寒力分布数学模型的研究*

丁　希　泉

（吉林省农科院机耕所）

我省地处严寒，冻害对苹果栽培危害极大。因此，选育抗寒、抗病、丰产、质优、耐贮、中或大型的苹果新品种，对扩大苹果栽培面积，提高苹果栽培的经济价值，改善人民生活，促进农业生产的发展，有着极为重要的意义。吉林省农科院果树所自1950年就开展了抗寒苹果育种工作，30多年来曾培育出许多抗寒中型、中大或大型苹果新品种，已在高寒地区生产上广泛推广栽培或正在推广之中。为了进一步提高育种工作水平，结合育种工作进行了苹果主要经济性状遗传规律方面的研究，重点研究抗寒力性状的遗传规律。从大量苹果杂种后代抗寒力分布资料来看，苹果杂种后代抗寒力的分布不仅有正态分布、左偏态分布，还有J型、反J和U型等分布类型。许多材料介绍了前二种分布型的数学模型及其计算方法，但对于后三种分布型未见报道。本文采用变量变换理论研究了苹果杂种后代抗寒力分布的数学模型及其计算方法，可供苹果杂种后代抗寒力遗传分析研究及抗寒苹果育种工作者参考。

材　料　来　源

材料系吉林省农科院果树所“苹果杂种后代抗寒力遗传规律的研究”中关于523（国光×玲珰果）×元帅；　金冠×凤·基；（大×小）F_1×（大×小）F_1杂交组合后代抗寒力分布频数的调查资料。

根据不同部位组织的冻害程度，划分苹果杂种后代抗寒力等级标准：

一级：各部位全无冻害。

二级：髓或原生木质部有极轻微冻害，其它组织未受冻害。

三级：髓或髓周围受冻害后呈淡黄色，后生木质部的髓线局部有冻害。

四级：髓受冻害变成褐色，初生木质部有轻微冻害。

五级：髓后生木质部、次生木质部射线及与皮层交界处的初生木质部冻害较重。

六级：髓深褐色，木质部、皮层均有冻害，呈褐色，重者甚至死亡。

一、变量变换基本原理

设变量X的概率曲线方程为：

$$y = f(x)$$

我们根据某种关系将X转变成新变量t，即$t = k(x)$。设新变量t的概率曲线方程为：

$$\tilde{y} = \phi(t)$$

*本项工作得到我院果树所顾模副所长的大力支持，并提供有关资料，在此表示衷心的感谢。

为实现这种转换，下面先证明二个定理。

定理1，如果原变量的概率曲线与新变量的概率曲线下的面积相等，则

$$f(x)=\phi(t)\cdot t' \tag{1}$$

式中t'为t对于x的一阶微分，即

$$t'=k(x)'=\frac{dk(x)}{dx} \tag{2}$$

证明：因为面积相等，则

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\phi(t)\,dt$$

若对X微分，则上式变为：

$$f(x)=\phi(t)\cdot t'$$

$\phi(t)\cdot t'$是原变量的概率曲线方程。

定理2，如果$f(x)=\phi(t)t'$，以$y=f(x)$表示原变量X的概率曲线方程，以$\tilde{y}=\phi(t)$代表新变量t的概率曲线方程，若两个曲线的对应面积相等，则得：

$$\int_{x_i}^{x_j} f(x)\,dx=\int_{t_i}^{t_j}\phi(t)\,dt \tag{3}$$

证明：由积分定理可知：

$$\int_{t_i}^{t_j}\phi(t)\,dt=\int_{x_i}^{x_j}\phi(t)\,t'\,dx$$

已知 $\phi(t)t'=f(x)$

代入上式后得：

$$\int_{t_i}^{t_j}\phi(t)\,dt=\int_{x_i}^{x_j}f(x)\,dx$$

即两条曲线对应面积相等。

以上证明，变量变换是可行的。而且，欲完成这种变换，还需解决二个问题。

1、选择适宜的$\phi(t)$；2、确定t与X的关系式$t=k(x)$。第一个问题，比较容易解决。只需选择一个最基本的、计算方便的概率分布。这里选择了标准的正态分布，即：

$$\tilde{y}=\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{4}$$

为已知新变量的概率曲线方程。

又由（1）式得：

$$y=f(x)=\frac{t'}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{5}$$

这就是欲求的原变量的概率曲线方程。还可进一步写出原变量的频数曲线方程为：

$$y=N\cdot f(x)=\frac{Nt'}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{6}$$

变量变换的关键问题就是确定出一个适宜的变量变换方程式，也就是新变量t与原变量X之间的关系式。确定了t与x的关系式，便得出分布型的数学表达式（5）或（6）。当然，这个变量变换方程的转换是以曲线对应面积相等为前提的。对于每个x值，我们可以计算它的频率及累积频率。同时，我们还可以按正态分布计算出各t值，使得t符合于基本条件$\int_{-\infty}^{t}\phi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx$。这样就得一组x与t的对应值，于是便可以根据x与t的关系，利用回归分析方法确定出t与x的关系式。不同分布型，t与x的关系式不同。本文重点研究J型，反J型，U型分布时，t与x的关系式，由（5）或（6）式得出它们分布的数学模型。

二、J 型 分 布

J型分布如图1。这种频数分布，在低等级端，曲线与x轴相切；在高等级端，曲线急剧突起。反映在t与x的关系曲线上（图2），在始端有一条水平渐近线（$t=c$），而在末端它有一条垂直渐近线（$x=b$），关系曲线曲率可采用代数式（最多到2～3次）已足够了。在图2中，关系线曲率不大，近似于一条直线。同时，因为0之对数为$-\infty$，所以可假定t与x关系式中含有对数项$\lg(t-c)$，$\lg(b-x)$，式中b和c为待定常数，即反映出该关系曲线具有水平渐近线$t=c$和垂直渐近线$x=b$。因此由上述t与x的曲线特点，我们作它们的关系式为：

$$\lg(t-c)=\lg(b-x)^{\beta}+\gamma_0+\gamma_1 x \tag{7}$$

式中：b，c，β，γ_0，γ_1为待定常数。

对于金冠×凤·基的杂种子代抗寒力频数分布资料，我们首先按正态分布计算出变换的变量值t_i（表1）。然后绘出t与x的关系图（图2）。由图2取$c=-2.1$，$b=6$。同时，还有三个系数需要求。用选点法，选三个等间距点，又能包含有较大频数所对应的变量值；选$x_1=3$，$h=1$；$x_2=4$，$x_3=5$；相对应的t值为：$t_1=-1.545$，$t_2=-0.908$，$t_3=-0.45$。将上列各值代入（7）中，经对数运算，整理得下列联立方程组：

表1　苹果杂种子代抗寒力频数分布（金冠×凤·基）

抗寒力等级	f_i	X_i	F_i	F_i/n	t_i
	—	0	—	–	$-\infty$
1	1	1	1	0.02041	−2.045
2	0	2	1	0.02041	−2.045
3	2	3	3	0.06122	−1.545
4	6	4	9	0.18367	−0.908
5	7	5	16	0.32653	−0.460
6	33	6	49	1.00000	∞
合　计	49				

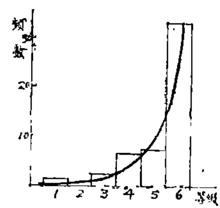

图1　（金冠×凤·基）杂种子代抗寒力分布

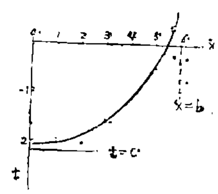

图2　t与x关系图

表2　　　　理 论 频 数 的 计 算

X_i	t_i	$\phi(t)$	E_i	e_i
0	$-\infty$			
1	−2.024	0.02149	1.1	1.1
2	−1.884	0.02978	1.5	0.4
3	−1.545	0.06118	3.0	1.5
4	−0.908	0.18194	8.9	5.9
5	−0.450	0.32640	16.0	7.1
6	∞	1.0	49.0	33.0

$$\begin{cases} -0.25571=0.4771\beta+\gamma_0+3\gamma_1 & (a)\\ 0.07628=0.301\beta+\gamma_0+4\gamma_1 & (b)\\ 0.21748=\gamma_0+5\gamma_1 & (c)\end{cases}$$

用消元法解方程组得：

$\beta=1.52754$　　　$\gamma_0=-2.7875$　　　$\gamma_1=0.601$

得方程式：

$$\lg(t+2.1)=\lg(6-x)^{1.52754}-2.7875+0.601x \qquad (8)$$

然后由上式算出各x所对应的t值，并按表2求出各理论值。进行χ^2测定，得$\chi^2=0.579$。查χ^2表，当自由度V＝3时，$\chi^2_{0.05}=7.815$。因$\chi^2<\chi^2_{0.05}$，故差异不显著，说明计算的理论值与实际值相符。

三、反J型分布

反J型分布图形（图3）与J型分布正好相反。曲线始端急剧突起，而末端与x轴高度相切。对于t与x关系线(见图4)，则始端有一条垂直渐近线x＝0，而末端有一条水平渐近线t＝d。曲线曲率仍然不大，仍可视为近似于一条直线。因而，我们可以假定t与x的关系式为：

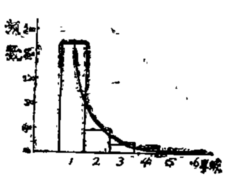

图3　苹果杂种子代抗寒力频数分布

（大×小）F_1×（大×小）F_1

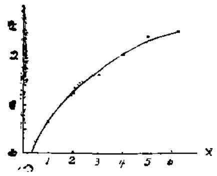

图4　t与x关系

$$\lg(d-t)=\lg x^{\alpha}+\gamma_0+\gamma_1 x \qquad (9)$$

式中d，α，γ_0，γ_1为待定常数。

对于（大×小）F_1×（大×小）F_1的子代抗寒力频数分布资料，我们首先按正态分布计算出变换的变量值t_i（表3）。然后绘出t与x的关系图（图4）。水平渐近线可取d＝2.4（图4）。α，γ_0，γ_1为常数值，我们仍用选点法求。因求三个系数，故选三个等距点。选的点应尽量包括频数较大的一些组所对应的x值。为此，我们选$x_1=1$，h＝1；$x_2=2$，$x_3=3$；则$t_1=0.642$，$t_2=1.23$，$t_3=1.602$。将这些值代入（9）式中经对数运算后，整理得下列联立方程组：

表3　　苹果杂种子代抗寒力频数分布

（大×小）F_1×（大×小）F_1

抗寒力等级	频数 f_i	助变数 X_i	F_i	F_i/n	t_i
—	—	0	—	—	$-\infty$
1	176	1	176	0.7395	0.642
2	36	2	212	0.8908	1.230
3	13	3	225	0.9454	1.602
4	8	4	233	0.9790	2.032
5	3	5	236	0.9916	2.391
6	2	6	238	1.0000	∞

$$\begin{cases} 0.24502 = \quad +\gamma_0+\gamma_1 & \text{(a)} \\ 0.10380=0.301\alpha+\gamma_0+2\gamma_1 & \text{(b)} \\ -0.098=0.4771\alpha+\gamma_0+3\gamma_1 & \text{(c)} \end{cases}$$

表4　　理论值的计算

X_i	t_i	$\phi(t)$	E_i	e_i
1	0.642	0.396	176.0	176.0
2	1.129	0.8706	207.2	31.2
3	1.594	0.94455	224.8	17.6
4	1.926	0.97295	231.6	6.8
5	2.127	0.98329	234.0	2.4
6	2.246	0.98765	235.1	1.1
7	2.315	0.98970	235.5	0.4
8	2.353	0.99069	235.8	0.3
9	2.374	0.99120	235.9	0.1
10	2.386	0.99148	236.0	0.1

用消元法解方程组得：

$\alpha=0.485$　　$\gamma_0=0.53223$　　$\gamma_1=-0.28721$

将d、α、γ_0、γ_1代入（9），得出方程式：

$$\lg(2.4-t)=\lg x^{0.485}+0.53223-0.28721x \tag{10}$$

或

$$\lg(2.4-t)=0.485\cdot\lg x+0.53223-0.28721x$$

由上式计算出各理论值（表4）。进行χ^2测定，得出$\chi^2=3.039$。查χ^2表，当自由度V＝3时，$\chi^2_{0.05}=7.815$。因为$\chi^2<\chi^2_{0.05}$，故差异不显著，说明计算结果与实际结果相符。

四、U 型 分 布

U型分布的图形如图5。该图形两端突起，中间凹下。对于t与x的关系曲线(图6)，则曲线的两端有两条垂直渐近线，$x=0$ 与 $x=b$ ($b=6$)。曲线变化较大，故采用二次代数式，t与x的关系式可写成：

$$t=\lg X^{\alpha}+\lg(b-x)^{\beta}+\gamma_0+\gamma_1 X+\gamma_2 X^2 \qquad (11)$$

式中：α，β，γ_0，γ_1，γ_2 为待定常数。

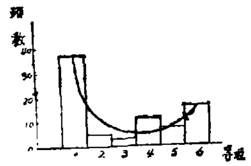

图5 苹果杂种子代抗寒力频数分布

(国光×玲珰果)×赤阳

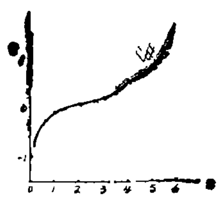

图6 t与x关系

表5 523(国光×玲珰果)×赤阳子代抗寒力频数分布

抗寒力等级	f_i	X_i	F_i	F_i/n	t_i
	—	0	—	—	$-\infty$
1	37	1	37	0.46835	−0.071
2	5	2	42	0.53165	0.080
3	3	3	45	0.56962	0.176
4	11	4	56	0.70886	0.550
5	7	5	63	0.79747	0.833
6	16	6	79	1.0000	∞
合 计	79				

523(国光×玲珰果)×赤阳子代抗寒力频数分布的资料，仍先按正态分布计算出变换的变量值t_i(表5)。由图6可以确定它的两条垂直渐近线$x=0$ 及 $b=6$。又因有五个系数，故需选五个点，将它们代入关系式(11)中，经对数运算后，整理得：

$$\begin{cases}0+0.699\beta+\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2=-0.079\\ 0.301\alpha+0.602\beta+\gamma_0+2\gamma_1+4\gamma_2=0.080\\ 0.4771\alpha+0.4771\beta+\gamma_0+3\gamma_1+9\gamma_2=0.176\\ 0.602\alpha+0.301\beta+\gamma_0+4\gamma_1+16\gamma_2=0.550\\ 0.699\alpha+0+\gamma_0+5\gamma_1+25\gamma_2=0.833\end{cases}$$

解方程组得：

$$\alpha=6.8989,\ \beta=7.1878,\ \gamma_0=-2.8838\quad \gamma_1=-2.7191,\ \gamma_2=0.4996$$

将α、β、γ_0、γ_1、γ_2、b代入(11)式，得出关系式：

$$t=\lg X^{6.8989}\cdot(6-x)^{7.1878}-2.8838-2.7191x+0.4996X^2 \qquad (12)$$

或

$$t=6.8989\lg x+7.1878\lg(6-x)-2.8838-2.7191x+0.4996X^2$$

将各X值代入上式，即求出各t值。再按表6计算出理论频数e_i。可见e_i值与f_i(表5)值是一致的。不需进行χ^2测定，即变换值与实际情况完全相符。

表6　　理 论 值 的 计 算

t_i	$\phi(t)$	E_i	e_i
—0.079	0.4685	37.0	37.0
0.080	0.5319	42.0	5.0
0.176	0.5698	45.0	3.0
0.550	0.7088	56.0	11.0
0.833	0.7975	63.0	7.0
∞	1.0000	79.0	16.0

综上所述，变量变换方法是可行的，用以上三种分布情况下的t与x关系式及其频数分布的数学模型，其计算结果与实际值相符合。当然，对于J型、反J型及U型分布的某些数量特征及其应用尚需进一步探讨。