DOI:10.16423/j.cnki.1003-8701.1982.04.010

利用经验公式经济参数确定氮磷化肥最佳施肥量

张　　宽

（吉林省农科院土肥所）

目前，我省在化肥分配及用量等方面均存在不平衡的问题。有一些高产富裕社队的部分田块采用每亩200斤以上的超高量；也有一些低产穷队的部分田块，则采用每亩20斤以下的超低量。即使在一般的生产单位中也没能真正作到依土壤肥力、作物，运用最佳施肥量。因此，如何依据化肥田间试验，探讨化肥的最佳施肥量，仍然是今后化肥研究工作中的一项重要课题。

化肥最佳施肥方案的制定，应以取得最高经济效益为根据，只有能取得最高经济效益的施肥方案才能认为是最佳[1]。在养分施用量和相应的作物产量之间可以得到一条肥料—作物产量反应的回归曲线。这条曲线可用不同函数配合。但最常用的函数为二次曲线函数[2]。二次式优于1.5次方变换、平方根变换，也优于直线方程式[3]。二次曲线函数还具有便于使用计算机运算等优点。因此，本文将通过玉米"以氮定磷"试验一例介绍一下选择二次曲线方程及应用它确定最佳施肥量的方法。

一、列出试验处理及产量结果表

将试验处理及玉米田间试验所取得的产量结果整理于表1。

表1　　试验处理与产量　　（单位：斤／亩）

重复 \ 处理	1 无肥	2 硝铵 35 过石 0.0	3 硝铵 35 过石 40	4 硝铵 35 过石 60	5 硝铵 35 过石 80	6 硝铵 35 过石 100	7 硝铵 35 过石 120
Ⅰ	291	334	457	488	492	540	493
Ⅱ	300	359	446	499	518	529	524
Ⅲ	309	342	468	483	532	500	528
总和	900	1035	1371	1470	1542	1569	1545
平均	300	345	457	490	514	523	515

本文承蒙杨国荣、丁希泉二位同志审阅，特此致谢。

二、确 定 经 验 公 式

（一）根据试验结果选择经验公式

根据试验资料在坐标纸上绘成散布图，根据绘成的图形同已知各方程式类型的图形进行对照，选定相同方程式图形来确定其经验公式，同时对选定的方程式类型进行检验。本文仅介绍二次曲线方程的选定及检验方法。

1、**选择经验公式** 根据施肥量（X）和增产量（y）（见表2），在坐标纸上点点绘图。

表2　　施 肥 量 与 增 产 量 的 关 系

处理 / 产量（斤/亩）	1	2	3	4	5	6	7
	无肥	硝铵 35 过石 0.0	硝铵 35 过石 40	硝铵 35 过石 60	硝铵 35 过石 80	硝铵 35 过石 100	硝铵 35 过石 120
各处理平均产量	300	345	457	490	514	523	515
比无肥区增产		45	157	190	214	223	215

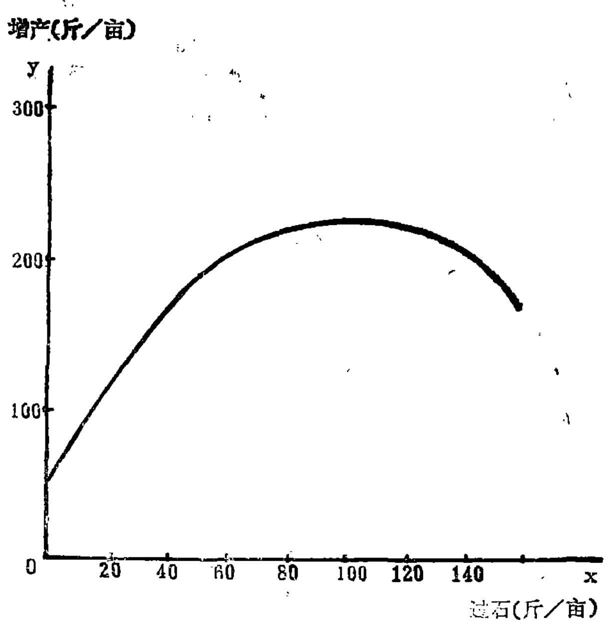

图1　　在亩施硝铵35斤基础上过石用量与增产量的关系

从上图的图形来看，是一条曲线，其曲线形式很类似二次抛物线。因此，暂选定二次曲线方程式$y=a+bx+cx^2$。

2、**检验经验公式** 在图的横坐标上，独立变数X是代表施磷量，各处理的施磷量分别为0、40、60、80、100、120，因为各处理磷量级差不等，即X为不等间隔。因此，检验经验公式时用差商法。具体检验方法可以列表（见表3）逐阶计算差商：首先是列出磷肥用量（X）和相应的增产量（y），求出y和X的一阶差分$\triangle y$和$\triangle X$并列入表内。再根据

$\delta_i^1=\frac{y_2-y_1}{X_2-X_1}$、 $\delta_i^2=\frac{\delta_2-\delta_1}{X_3-X_1}$和$\delta_i^3=\frac{\delta_2^2-\delta_1^2}{X_4-X_1}$公式，求出一阶差商、二阶差商和三阶差商。最后根据$\delta_i^1$、$\delta_i^2$和$\delta_i^3$的变化区间、变化幅度及变化幅度上下限之差的数值大小，来判断选定的方程式是否合适（见表3）。

表3　　增产量（y）与磷肥用量（X）的关系

X	y	△y	△X	δ_i^1 $\left(\frac{y_2-y_1}{X_2-X_1}\right)$	δ_i^2 $\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{X_3-X_1}\right)$	δ_i^3 $\left(\frac{\delta_2^2-\delta_1^2}{X_4-X_1}\right)$
0.0	45					
		112	40	2.80		
					−1.15÷60=−0.01917	
40	157					
						−0.00792÷80=−0.000099
		33	20	1.65		
					−0.45÷40=−0.01125	
60	190					
						−0.0075÷60=−0.000125
		24	20	1.20		
					−0.75÷40=−0.01875	
80	214					
						−0.0025÷60=−0.00004167
		9	20	0.45		
					−0.85÷40=−0.02125	
100	223					
		−8	20	−0.40		
120	215					
差商高低值区间（绝　对　值）				−0.4～2.8 =−3.2	−0.02125～−0.01125 =−0.01	−0.000125～−0.0000417 =−0.0000833
差商高低值区间值与其高低值之商的变幅(区间)				8～−1.14	0.47～0.89	0.67～1.999
变幅(区间)上下限之差（绝　对　值）				9.14	−0.42	−1.329

从表3明显看出：变幅上下限之差最小值为0.42，并出现在δ_i^2（即第二阶差商）一栏内，说明第二阶差商已基本为一常数。因此，根据上图选定二次抛物线方程式是合适的。

（二）二次曲线方程系数的计算方法

为确定系数a、b、c，根据最小二乘法原理，必使$\sum(y-\hat{y})^2$ 或 $\sum[y-(a+bx+cx^2)]^2$的值最小。为此，分别对系数a、 b、c求出偏导数，并令各偏导数值等于零，于是可得出联立方程式如下：（将方程式内有关项数列入表4）

$$\begin{cases} na+(\sum X)b+(\sum X^2)C=\sum y \\ (\sum X)a+(\sum X^2)b+(\sum X^3)C=\sum Xy \\ (\sum X^2)a+(\sum X^3)b+(\sum X^4)C=\sum X^2y \end{cases}$$

表 4　　　增产量（y）与施磷量（X）的关系

	y	X	X^2	X^3	X^4	Xy	X^2y
	45	0.0	0.00	0.000	0.0000	0.00	0.000
	157	40	1600	64000	2560000	6280	251200
	190	60	3600	216000	12960000	11400	684000
	214	80	6400	512000	40960000	17120	1369500
	223	100	10000	1000000	100000000	22300	2230000
	215	120	14400	1728000	207360000	25800	3096000
Σ (n=6)	1044	400	36000	3520000	363840000	82900	7630800

将表 4 内数字代入联立方程即得：

$$\begin{cases} 6a+400b+36000c=1044 \\ 400a+36000b+3520000c=82900 \\ 36000a+3520000b+363840000c=7630800 \end{cases}$$

下面采用高斯消去法解联立方程组（见表 5）。

表 5　　　高 斯 消 去 法 解 联 立 方 程 组

	1	X	X^2	y	验　算	序号
1	6	400	36000	1044	37450	(1)
X	400	36000	3520000	82900	3639300	(2)
X^2	36000	3520000	363840000	7630800	375026800	(3)
(1)×1／6	1	66.67	6000.00	174.00	6241.67	(4)
(2)×1／400	1	90.00	8800.00	207.25	9098.25	(5)
(3)×1／36000	1	97.78	10106.67	211.97	10417.42	(6)
(4)－(6)		－31.11	－4106.67	－37.97	－4175.75	(7)
(5)－(6)		－ 7.78	－1306.67	－ 4.72	－1319.17	(8)
(7)÷(－31.11)		1	132.00	1.22	134.22	(9)
(8)÷(－7.78)		1	167.95	0.61	169.56	(10)
(9)－(10)			－35.95	0.61	－35.34	(11)
(11)÷(－35.95)	C=－0.0169					
C代入(9)	b=1.22－132×(－0.0169)=3.45					
b、C代入(4)	a=174－66.67×(3.45)－6000×(－0.0169)=45.38					

将通过表 5 形式计算出来的a、b、c代入选定的二次曲线方程式中，即得出在亩施35斤硝铵基础上，磷肥不同用量（X）与增产粮食数量（y）之间关系的方程式为：

$$y=45.38+3.45X-0.0169X^2$$

（三）二次曲线方程式的显著性测定

经验公式虽然找出，但这个回归方程式能否反映出 X与y 之间是否有真实的回归关系？它们之间的关系达到什么样的显著程度？还需要对二次曲线方程式总体进行显著性测定。其测定方法为F测定法。

$$F=\frac{S_{\hat{y}}^2}{S_d^2} \qquad 式中\ S_{\hat{y}}^2=\frac{\sum\hat{Y}^2}{m}$$

$$S_d^2=\frac{\sum Y^2-\sum\hat{Y}^2}{n-m-1}=\frac{\sum d^2}{n-m-1}$$

$$\sum Y^2=\sum(y-\bar{y})^2$$

$$\sum\hat{Y}^2=\sum(\hat{y}-\bar{y})^2$$

$$\sum d^2=\sum Y^2-\sum\hat{Y}^2$$

上式中y为试验得出的产量，$\hat{y}$为回归产量，$\bar{y}$为试验产量的平均产量；$\sum Y^2$为总体偏差平方和，$\sum\hat{Y}^2$为回归偏差平方和，$\sum d^2$为距回归平方和；$S_{\hat{y}}^2$为回归项方差，S_d^2为距回归项方差；m为回归自由度，$n-m-1$为距回归自由度，$n-1$为总体自由度。n（处理个数）＝6，m（为二次曲线方程$y=a+bX+cX^2$中自变量X系数b、c的个数）＝2。

将上述各式中有关项数列入表6。

表6

	y	$\hat{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$
	45	45.38	16641	16543.1
	157	156.34	289	311.88
	190	191.54	256	307.65
	214	213.22	1600	1538.21
	223	221.38	2401	2244.86
	215	216.02	1681	1765.68
Σ	1044	1043.88	22868	22711.38
$\bar{y}$	174			

从表6可见 $\sum Y^2=22868$

$\sum\hat{Y}^2=22711.38$

$\therefore\quad \sum d^2=\sum Y^2-\sum\hat{Y}^2=22868-22711.38=156.62$

$$\because \quad S_d^2=\frac{\Sigma d^2}{n-m-1}=\frac{156.62}{6-2-1}=52.2$$

$$S_{\hat{y}}^2=\frac{\Sigma\hat{Y}^2}{m}=\frac{22711.38}{2}=11355.69$$

$\therefore$ 将 $S_{\hat{y}}^2$ 和 S_d^2 代入 $F=\frac{S_{\hat{y}}^2}{S_d^2}$ 公式中即得 $F=\frac{11355.69}{52.2}=217.54$

查F表，当分子项的自由度为2、分母项自由度为6－2－1＝3时，$F_{0.05}=9.55$，$F_{0.01}=30.82$。将以上计算过程列成方差分析表（见表7）。

表7　　回归方程式方差分析表

变异原因	自由度	偏差平方和	方差	F值	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
回归	$m=2$	$\Sigma\hat{Y}^2=\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2$ 22711.38	$S_{\hat{y}}^2=\frac{\Sigma\hat{y}^2}{m}$ 11355.69	$F=\frac{S_{\hat{y}}^2}{S_d^2}$ 217.54**	19.16	99.17
距回归	$n-m-1=6-2-1=3$	$\Sigma a^2=\Sigma y^2-\Sigma\hat{y}^2$ 156.62	$S_d^2=\frac{\Sigma d^2}{n-m-1}$ 52.2			
总体	$n-1=6-1=5$	$\Sigma Y^2=\Sigma(y-\bar{y})^2$ 22868				

从表7可见求得的$F=217.54$，大于$F_{0.05}=19.6$和$F_{0.01}=99.17$，说明所得到的二次曲线方程是极显著的。$y=45.38+3.45X-0.0169X^2$中独立变量（自变量）X与依靠变量y有真实的回归关系。故此可用二次曲线方程表示X与y的函数关系。

三、根据经验公式和经济参数计算最佳施肥量

（一）每亩获得最高产量的施肥量

单位面积获得最高产量施肥量的计算，只需要产量反应函数：$y=a+bX+cX^2$，计算y对X的导数并令其为零，

$$\frac{\partial y}{\partial X}=0 \qquad b+2cX=0$$

就可得到计算每亩获得最高产量的施肥量。公式：$X=\frac{-b}{2c}$，将方程式$y=45.38+3.45X-0.0169X^2$中的系数b和c代入$X=-\frac{b}{2c}$中，即得到每亩获得最高产量的过石用量$X=\frac{-3.45}{(-0.0169)\times 2}=\frac{3.45}{0.0338}=102.07$。

（二）获得每亩最高收益的施肥量

计算获得单位面积最高收益的施肥量是利用施肥利润函数π。其公式如下：

$$\pi=〔p\times(a+bx+cx^2)〕-(w+qx)$$

式中X为过石用量（斤／亩），p.q和w为经济参数，其中p为玉米单价0.1元／斤，q为单位重量养分价格，即过石0.07元／斤，w为施肥费0.2元／亩。式中（w+qx）为施肥总成本，〔$p\times(a+bx+cx^2)$〕为施肥总报酬，π为施肥总报酬扣除施肥总成本后的净报酬。将各项数值代入上式，即得：

$$\pi=〔0.1\times(45.38+3.45x-0.0169x^2)〕-(w+qx)$$

$$=4.538+0.345x-0.00169x^2-0.2-0.07x$$

$$=4.338+0.275x-0.00169x^2$$

令施肥利润函数（π）对于养分（X）的导数为零：$\frac{\partial\pi}{\partial X}=0$

上式即得：$0+0.275-2\times0.00169X=0$

$\therefore$每亩获得最高收益的施肥量$X=\frac{0.275}{2\times0.00169}=81.36$

（三）肥料投资获得最大报酬率的施肥量

肥料投资获得最大报酬率施肥量的计算方法是施肥总报酬函数〔即去掉产量反应函数$y=a+bx+cX^2$中常数项a，再乘以P得$P(bx+cx^2)$〕除以施肥总成本函数（w+qx），即得施肥报酬率函数R。$R=\frac{P(bX+cX^2)}{w+qx}$。取施肥报酬率函数（R）对过石用量（X）的导数，并令其等于0，解出方程式中的X值，就是施用过石投资获得最大报酬率的每亩过石用量。

根据公式 $\frac{\partial R}{\partial X}=(\frac{V}{W})'=\frac{V'W-W'V}{W^2}$

令 $\frac{\partial R}{\partial X}=0$

即$\frac{〔P(bX+cX^2)〕'(W+qX)-(W+qX)'〔P(bX+cX^2)〕}{(W+qX)^2}=0$

$$=PbW+2PcWX+PbqX+2PcqX^2-PbqX-PcqX^2$$

$$=bW+2cWX+cqX^2=0$$

用公式法解一元二次方程：$X=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

将 $cqX^2+2cWX+bW=0$ 中有关项代入公式 $X=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$（式中 $B=2cW$、$C=bW$、$A=cq$）中得：

$$X=\frac{-(2cW)\pm\sqrt{(2cW)^2-4cq\cdot bW}}{2cq}$$

式中 c和b为求得的二次曲线方程式 $y=45.38+3.45X-0.0169X^2$ 中的系数，其中 $c=-0.0169$、$b=3.45$，W和q为经济参数，$W=0.2$元／亩（施肥费）、$q=0.07$元／斤（每斤过石价格）。将有关数字代入上式

$$得：X=\frac{-[2\times0.2\times(-0.0169)]}{2\times(-0.0169)\times0.07}$$

$$\pm\frac{\sqrt{[2\times0.2\times(-0.0169)]^2-4\times(-0.0169)\times0.07\times0.2\times3.45}}{2\times(-0.0169)\times0.07}$$

$$=\frac{0.00676\pm\sqrt{0.0000457+0.003265}}{-0.002366}$$

$$=\frac{0.00676\pm0.05753868}{-0.002366}\quad X有两个解$$

$$即\quad X_1=\frac{0.06429868}{-0.002366}=-27.18$$

$$X_2=\frac{-0.05077868}{-0.002366}=21.46$$

$X_1=-27.18$这在生产上无意义，因为施肥量不可能为负数，因此取X_2。$X_2=21.46$斤，即为每亩过石投资获得最高报酬率的的施肥量。也就是斤肥增粮值最高的施肥量。

在上述三个施肥量中，就全省而言，应以单位面积上获得最大经济效益的施肥量为最佳。而对于资金和化肥较充足，又不考虑经济效益的部分高产富裕社队，可探讨单位面积获得最高产量的施肥量，而不应采用大于此量的超高量。因为玉米采用超高量后增加的化肥不但不起增产作用反而导致减产。在资金和化肥不足的生产单位，化肥用量也不应低于肥料投资获得最大报酬率的施肥量，即斤肥获得最高产量的施肥量。

除“以氮定磷”试验外，凡施肥量与增产量之间存在二次曲线函数关系的化肥试验结果，均可采用此法进行计算，根据计算结果，可因地制宜地确定氮磷最佳施肥量。其运算方法同上，本文不再赘述。

参考文献

〔1〕陶勤南：关于提高化肥经济效益的原理与应用。陕西省农科院土肥所 1982，8。
〔2〕姚振镐：利用肥料反应试验和经济模式确定最佳施肥量。《土壤通报》1982（1）。
〔3〕李昌伟等：氮磷肥效应曲线及其在确定施肥量中的应用初探。西北农学院合理施肥组 1982.
〔4〕丁希泉：回归分析在农业科学中的应用。吉林省农业科学院情报资料室 1978。
〔5〕南京农学院主编：田间试验和统计方法。农业出版社 1979、9。
〔6〕赵仁熔等：田间试验和统计方法。沈阳农学院 1978、12。