

# 玉米、高粱、大豆粒重 增长过程的数学模拟

丁希泉

(吉林省农科院机耕所)

## 摘 要

本文分析高产玉米、高粱、大豆粒重增长过程的特性,提出粒重增长过程的数学模型:

$$W_t = \frac{W_0}{1 + e^{a+bt}} \quad (1)$$

进而采用数学分析方法研究粒重增长过程的某些数量规律,得出粒重增长速度或称灌浆速度的数学模型:

$$V = \frac{dw}{dt} = \frac{w_0 \cdot (-b) \cdot e^{a+bt}}{(1 + e^{a+bt})^2} \quad (2)$$

以及方程(1)的拐点和方程(2)的极值点的出现时间(即横坐标值):

$$t = -\frac{a}{b} \quad (3)$$

最大灌浆速度:

$$V_{\max} = -\frac{bw_0}{4} \quad (4)$$

对玉米、高粱、大豆籽粒增重过程实测资料与计算结果吻合程度的 F-检验表明,计算结果与实际资料相吻合。

---

籽粒是构成产量的重要因素。籽粒重量及其饱满程度直接影响到作物产量。任何谷类作物达到高产,籽粒增长都是沿着一个适宜的路径进行的。然而籽粒增长过程又受到水分、温度、光照等多种因素的影响,尤其是东北地区经常出现低温冷害,严重影响籽粒灌浆成熟,导致大幅度减产。因此,了解籽粒增长过程及其某些特点,采取合理的栽培管理措施,使籽粒能够沿着最好的路径增长,对于抗御低温冷害,获得作物高产具有一定的实际意义。所以,农业科研工作者,经常测定籽粒增重情况,以便分析籽粒增长规律。目前大多数研究者采用的方法是图解法,加以文字说明。本文则采用数学模拟方法研究三种主

要早田作物籽粒增重规律，提出适宜的数学模型。并采用数学分析方法进一步分析籽粒增重过程中的某些数量特征。

## 一、数学模型的选择

在研究籽粒增重过程中，一般均是研究一定数量籽粒（大粒种为100粒，小粒种为1000粒）的重量变化情况。为了使选择的数学模型能符合籽粒增重过程，我们首先研究籽粒增重过程曲线的特点。根据我们对玉米、高粱、大豆粒重增重过程的实测资料，分别绘出玉米、高粱、大豆百（千）粒重增重过程图（图1、2、3）。从图看出，这些曲线均呈为一条S形曲线。同时，曲线的上方或下方，当达到某一个时间以后，曲线上升或下降均渐趋缓慢。并接近于一条水平的直线，也就是这条S形曲线上下方各有一条水平的渐近线。如果再分段来研究这条曲线的特点，可以看出，这条曲线下半部向内凹的曲线段，实际上是一条指数函数曲线，其指数值为正值；而上半部向外凸的曲线段，也是一条指数函数曲线，但它的指数值则是负值。这两个区段的分界处即是整个曲线的拐点。在拐点处，指数曲线的指数值由正值转变为负值。

因此，对于上述特征的曲线，我们可以认为，经历一定天数  $t$  以后的籽粒重是起始时籽粒重与  $t$  天内按指数曲线规律增加重量之和。为此，我们可以将这种关系写成下列的表达式：

$$W_0 = W_t + W_t \cdot e^{a+bt}$$

或者将它变换成为：

$$W_t = \frac{W_0}{1 + e^{a+bt}} \quad (1)$$

式中， $W_t$ —在  $t$  增长时间内籽粒重       $W_0$ —成熟时籽粒最大重量  
 $t$ —增长时间（天）；       $a$ 、 $b$ —决定曲线斜率、曲率和拐点的参数。

## 二、计算结果与

### 统计检验

#### 1、玉米

根据我们测定亩产1200~1300斤玉米百粒重增重过程的数值，按数学模型(1)式进行计算，得出玉米百粒重增重曲线方程式为：

$$W_t = \frac{31.939}{1 + e^{3.7289 - 0.13317t}} \quad (2)$$

式中， $W_t$ — $t$  时间的玉米百粒重（克）

$t$ —籽粒增长时间（天）。

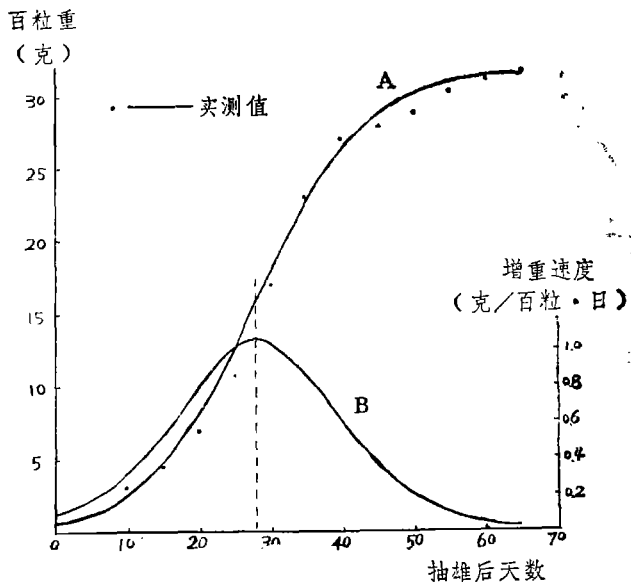


图1 玉米百粒重增重曲线

将不同的  $t$  值代入 (2) 式, 计算出相对应的  $Wt$  值, 并绘出玉米百粒重增重曲线 (图 1-A)。显而易见, 这条曲线与实测值是非常吻合的。为了检验它们的吻合程度, 我们又进行了  $F$ -检验 (如表 1), 计算得出  $F$  值为 1255.5, 达到极显著。说明此方程式能够代表玉米百粒重增重过程。

表 1 方差分析表

变异原因	偏差平方和	自由度	均方差	F 值	不同显著标准的 F 值	
					0.01	0.005
回 归	1661.04	1	1661.04	1255.51	9.65	12.23
机 误	14.55	11	1.332			
总 体	1675.59	12				

## 2、高粱

根据我们测定亩产 1000~1100 斤高粱千粒重增重过程的资料, 按数学模型 (1) 式, 计算出高粱千粒重增重过程的方程式为:

$$Wt = \frac{24.315}{1 + e^{3.735 - 0.187t}} \quad (3)$$

式中,  $Wt$ — $t$  时间的高粱千粒重 (克);  $t$ —籽粒增长时间 (天)。

如果将不同的  $t$  值代入 (3) 式分别计算出相对应的  $Wt$  值, 并绘出高粱千粒重增重曲线 (图 2~A)。显而易见, 这条曲线与实际值是非常吻合的。为了检验它们的吻合程度, 我们又进行了  $F$ -检验 (表 2), 计算得出  $F$  值为 1383.09, 达到极显著水准。说明方程式 (3) 能够极好的反映出高粱千粒重增重过程。

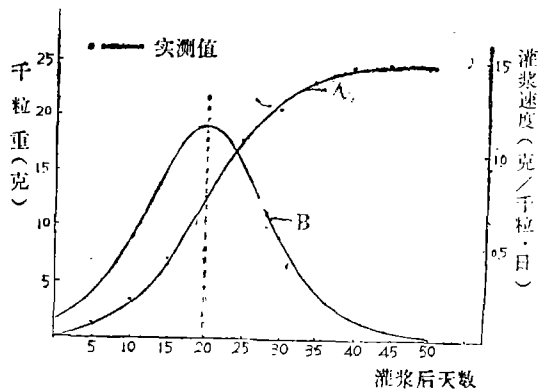


图 2 高粱千粒重增长曲线

表 2 方差分析表

变异原因	偏差平方和	自由度	均方差	F 值	不同显著水准的 F 值	
					0.01	0.005
回 归	734.8377	1	734.8377	1383.09	11.26	14.69
机 误	0.5313	8	0.0664			
总 体	735.3690	9				

## 3、大豆

根据我们测定亩产 350~400 斤大豆百粒重增重过程的资料, 按模型 (1) 计算出大豆百粒重增重过程方程式为:

$$W_t = \frac{12.8756}{1 + e^{5.123 - 0.178t}} \quad (4)$$

式中， $W_t$ — $t$  生育时间大豆百粒重（克）；  $t$ —籽粒增长时间（天）。

如果将不同的  $t$  值代入（4）式，分别计算出相对应的  $W_t$  值，并绘出大豆百粒重增重曲线（图3—A）。显而易见，计算曲线与实测值是非常吻合的。

为了检验它们的吻合程度，我们又进行方差分析（表3），计算得  $F$  值为 1207.57，达到极显著水准。说明方程（4）能够很好的代表大豆百粒重增重过程。

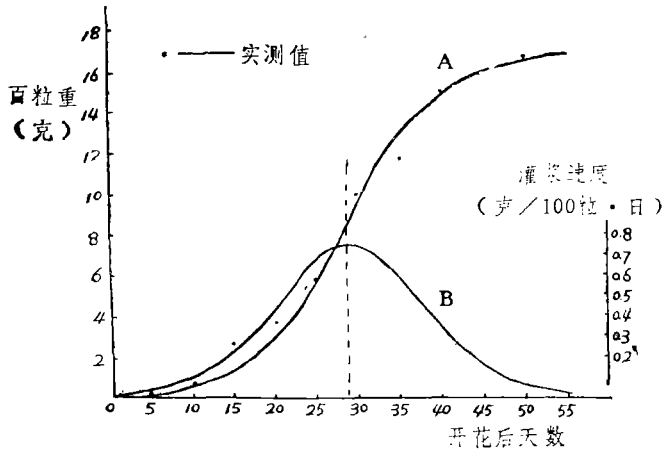


图3 大豆百粒重增重曲线

表3 方差分析表

变异原因	偏差平方和	自由度	均方差	F 值	不同显著水准的 F 值	
					0.01	0.005
回归	502.3863	1	502.3863	1207.57	10.04	12.83
机误	4.1603	10	0.41603			
总体	506.5466	11				

### 三、分析与讨论

从上节计算结果得到籽粒增重过程的数学表达式，它不仅反映出籽粒的增重过程，而且为我们进一步研究分析籽粒增重过程的数量规律奠定了基础。下面就采用数学分析方法加以研究。

籽粒增重过程是一个连续变化的过程。在这个过程中，各个单位时间内的粒重增长量是不同的，即所谓的灌浆速度不同。所以，灌浆速度的变化过程也应是一条连续变化的曲线。这条曲线可以由籽粒增重方程式来求得。从高等数学知识可知，某一函数的一阶微分，它的物理意义即表示速度的概念。为此，如果将表示籽粒增重过程的方程式（1）对  $t$  进行一阶微分的话，其结果便是籽粒增重速度或者称为灌浆速度方程。于是可得到灌浆速度方程式为：

$$v = \frac{dW_t}{dt} = \frac{W_0 \cdot (-b) \cdot e^{a+bt}}{(1 + e^{a+bt})^2} \quad (5)$$

对于我们计算过的玉米、高粱、大豆来说，灌浆速度方程式分别为：

玉米:

$$v = \frac{dWt}{dt} = \frac{4.2533 \cdot e^{3 \cdot 7269 - 0 \cdot 13317t}}{(1 + e^{3 \cdot 7269 - 0 \cdot 13317t})^2} \quad (6)$$

高粱:

$$v = \frac{dWt}{dt} = \frac{4.547 \cdot e^{3 \cdot 735 - 0 \cdot 187t}}{(1 + e^{3 \cdot 735 - 0 \cdot 187t})^2} \quad (7)$$

大豆:

$$v = \frac{dWt}{dt} = \frac{3.0039 \cdot e^{5 \cdot 123 - 0 \cdot 178t}}{(1 + e^{5 \cdot 123 - 0 \cdot 178t})^2} \quad (8)$$

根据(6)、(7)、(8)式分别计算出不同 $t$ 值时,玉米、高粱、大豆的灌浆速度( $v$ )值,并分别绘出灌浆速度曲线(图1—B, 2—B, 3—B)。从图看出,它们均是一条连续变化的单峰曲线,曲线的高峰即是灌浆速度的极大值。在这点之前,随着天数的增加,灌浆速度也随着增大;而在这个点之后,则随着天数的增加,灌浆速度却不断地减少。那么这个极值点在什么时间出现呢?也就是它的横坐标值等于多少呢?从高等数学可知,方程式(5)的极值点的横坐标与方程式(1)的拐点的横坐标是一致的。它们均是以方程式(1)对 $t$ 的二阶微分等于零为先决条件的,即 $W(t)'' = 0$ 。经过微分计算,便得出方程式(1)对 $t$ 的二阶微分的表达式为:

$$W(t)'' = \frac{d^2Wt}{dt^2} = \frac{W_0 \cdot b^2 \cdot e^{a+bt} \cdot (e^{a+bt} - 1)}{(1 + e^{a+bt})^2} \quad (9)$$

此方程式又称为灌浆加速度方程。方程式(1)、(5)、(9)揭示了籽粒增重过程的数量规律。我们要想使(9)式的右边部分等于零,只能是使式中的 $e^{a+bt} - 1 = 0$ ,也就是 $e^{a+bt} = 1$ 。为此,必须是 $a+bt = 1$ ,于是求得:

$$t = -\frac{a}{b} \quad (10)$$

这个 $t$ 值便是籽粒增重曲线的拐点,灌浆速度曲线的极值点和灌浆加速度曲线与横坐标轴交点的横坐标值,也就是它们出现的时间。对于玉米,按(10)式计算得 $t = 28$ (天),也就是玉米抽雄后28天,或者抽丝后20~22天灌浆速度值达到最大。对于高粱,按(10)式计算得 $t = 20$ (天),也就是高粱开花授粉后20天,灌浆速度值达到最大。

玉米、高粱均是禾本科作物,生理生化研究表明:禾本科作物籽粒灌浆过程主要是淀粉的积累,而淀粉的合成则主要是在线二磷酸葡萄糖转葡萄糖甘酶的参予下,由蔗糖转化而成。这个酶的活性高峰出现在开花后21天左右。磷酸化酶在淀粉合成中也具有重要的作用,它的活性高峰在开花后10~20天出现。显而易见,开花后20天左右,正是这两个酶活性高峰出现的时间,因而淀粉积累快,籽粒增长也最快,即灌浆速度达到最高峰值。说明计算结果与实际情况是一致的。对于大豆,按(10)计算得: $t = 29$ (天),即大豆开花后29天,籽粒灌浆速度达到最大值。生理生化的研究表明,大豆开花后10~30天,呼

吸强度逐渐升高，开花后30天达到高峰。呼吸过程不仅为脂肪合成提供了能量，而且也提供了合成所需要的原料（甘油和脂肪酸）。因此，这个时期也正是脂肪和蛋白质合成最强烈的时期，籽粒增重迅速，即灌浆速度达到最大值。

如果将(10)式代入(5)式，便得到最大灌浆速度为：

$$V_{\max} = -\frac{bW_0}{4} \quad (11)$$

对于玉米，最大灌浆速度为1.063（克/百粒·日）高粱为1.137（克/千粒·日）；大豆为0.751（克/百粒·日）。

如果再把(10)式代入(1)式，便得到最大灌浆速度日的粒重：

$$W_t = \frac{W_0}{2}$$

也就是说，最大灌浆速度日的粒重是总粒重的一半，或者说，此时的灌浆过程已进行一半。然而玉米、高粱所经历的时间仅为总灌浆时间的40%左右。可见，禾本作物前期灌浆过程是很重要的。

同时，从图上可以看出，在灌浆速度最大值前后的一定时间内，灌浆速度也较大，在这段时间内籽粒增重较快，对于最后的籽粒重有直接的影响。从我们计算三个作物来看，对于玉米，抽雄后20~50天，粒重增长量占总粒重的70%以上；对于高粱，开花后10~30天，粒重增长量占总粒重的70%以上；对于大豆，开花后20~40天之间粒重增长量占总粒重的70~80%。显而易见，在仅20~30天的时间里，粒重增长量却占总粒重的三分之二以上。从而说明，这段时间在籽粒增重过程中是相当重要的时期。在栽培管理上，应该保证这段时间的水肥供应，使籽粒得到迅速增长，以便获得高产。

籽粒灌浆过程还受水、肥、温度等条件的影响。例如，玉米田水分适宜条件下，0~

表 4 水、肥、密对大豆粒重的影响

处	理	平方米粒重 (克)	百粒重 (克)	品 种
水 分	适 水 区	336	19.0	吉林十三号
	对照(不灌水区)	295	18.4	
	适 水 区	349	20.7	黑 农 26 号
	对照(不灌水区)	291	17.8	
肥 料	N10 P10	399	18.5	吉林十三号
	0 10	283	17.9	
	10 0	324	17.7	
	0 0	238	17.6	
密 度	37.5 万 株 / 亩	152	18.4	吉林十三号
	30 万 株 / 亩	397	17.9	
	22.5 "	341	18.5	
	15.0 "	286	18.0	
	7.5 "	263	17.8	

50厘米层土壤湿度为23.0%左右，即占田间持水量的85%，每穗粒重为227克；对照区土壤水分条件较差，0~50厘米层土壤湿度为20.0%，即占田间持水量的75%，每穗粒重只有174克。从大豆水、肥、密对籽粒影响的试验结果（表4）也看出，适宜的水分状况，养分供应和密度对大豆每平方米粒重和百粒重均有良好的作用。从而为我们进行肥水管理提供依据。

从高粱分期播种试验来分析气温对高粱灌浆过程的影响（表5）可看出，高粱灌浆前期对温度反应敏感，平均气温高，籽粒增长快；反之气温低，籽粒增长慢。一般气温在23~25℃为宜，低于20℃对籽粒增重有明显的影响。显而易见，创造良好的水分状况和营

表 5 气温对高粱灌浆过程的影响 (护4号)

期 次	灌 浆 第 4 天		灌 浆 第 8 天		灌 浆 第 16 天	
	日平均气温	干 粒 重	日平均气温	干 粒 重	日平均气温	干 粒 重
三	25.3	1.4	24.1	3.0	23.2	9.2
六	22.7	0.8	22.6	1.8	20.0	6.4
七	13.5	—	14.7	—	16.1	1.7

养条件，对于籽粒增重是非常有作用的。

总之，通过对玉米、高粱、大豆粒重增长特性的分析，我们所提出的粒重增长方程较好的与实际资料相吻合。同时，通过进一步的数学分析得到了粒重增重过程的许多数量规律，揭示了籽粒增重过程的数量特性。虽然，应用数学模拟方法仅仅是开始，它有着广泛前途和重大作用，将在今后的科研实践中做进一步探讨。